Les exercices I *et* II *sont indépendants*

I

Le but de l'exercice est d'étudier une fonction réelle de variable réelle définie par l'intermédiaire d'une intégrale, sans effectuer directement le calcul de l'intégrale.

Soit D l'ensemble des nombres réels, privé des points - 1 et + 1 :

$$D = \mathbf{R} - \{ -1, +1 \}.$$

Pout tout x appartenant à D, notons :

- g_x l'application de l'intervalle $[0, 2\pi]$ dans $\mathbf{R}$ définie par

$$g_x(\varphi) = \text{Log}(x^2 - 2x\cos\varphi + 1) \quad , \quad \varphi \in [0, 2\pi] .$$

et

- I_x l'intégrale : $\int_0^{2\pi} g_x(\varphi)\, d\varphi$.

1° Montrer que l'intégrale I_x est définie pour tout x appartenant à D et qu'elle est égale à

$$2\left(\int_0^{\pi} g_x(\varphi)\, d\varphi\right).$$

On définit ainsi une application f de D dans $\mathbf{R}$ par la relation $f(x) = I_x$ pour tout x appartenant à D.

2° Montrer que f est paire; pour $x \neq 0$, calculer $f\left(\frac{1}{x}\right)$ en fonction de $f(x)$.

3° Montrer que $f(x^2) = 2f(x)$. (On pourra décomposer le polynôme $x^4 - 2x^2\cos\varphi + 1$ en un produit de deux polynômes de degré 2.)

4° Montrer que pour tout nombre réel ε strictement positif on peut trouver un nombre réel η strictement positif, indépendant de φ, tel que la propriété suivante soit vérifiée :

$$|x| < \eta \Rightarrow |\text{Log}(x^2 - 2x\cos\varphi + 1)| < \varepsilon .$$

En déduire que f est continue au point $x = 0$.

5° Calculer explicitement $f(x)$ pour $|x| < 1$, en utilisant le § 3° et la continuité de f à l'origine.

Calculer $f(x)$ pour $|x| > 1$.

II

Soit p un entier naturel; on considère p variables aléatoires réelles T_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$; ces variables sont indépendantes et ont la même densité de probabilité f définie par :

$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{pour } t < 0 \\ f(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t} & \text{pour } t \geqslant 0 \end{cases}$$

où λ est un nombre réel strictement positif.

1° Calculer l'espérance et la variance de T_i.

2° La variable aléatoire T_i représente la durée de vie du $i^{\text{ème}}$ élément d'un système S comportant p éléments. On suppose que le système S tombe en panne à l'instant aléatoire T où l'un de ses éléments meurt.

a. Déterminer la fonction de répartition et la densité de probabilité de T.

b. Si u est un nombre réel strictement positif, montrer que la probabilité de l'événement $(T \geqslant u)$ est strictement inférieure à la probabilité de l'événement $(T_i \geqslant u)$, si $p \geqslant 2$.

3° Un système V comporte deux éléments de durées de vie T_1 et T_2 respectivement. Le système V est en panne uniquement lorsque les deux éléments sont morts. Soit W l'instant aléatoire où V est en panne.

a. Déterminer la fonction de répartition et la densité de probabilité de W.

b. Si u est un nombre réel strictement positif, montrer que la probabilité de l'événement $(W \geqslant u)$ est strictement supérieure à la probabilité de l'événement $(T_i \geqslant u)$.

4° Soit q un entier naturel; on considère q variables aléatoires réelles T'_i $(i = 1, 2, \ldots, q)$; ces variables sont indépendantes et ont la même densité de probabilité f' définie par

$$\begin{cases} f'(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ f'(t) = \mu^2 t e^{-\mu t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

où μ est un nombre réel strictement positif $(\mu \neq \lambda)$.

On mélange p éléments de durée de vie T_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ et q éléments de durée de vie T'_i $(i = 1, 2, \ldots, q)$. On choisit au hasard un élément dans ce mélange; soit X sa durée de vie.

a. Déterminer la densité de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance de X.

c. Calculer la variance de X.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail